1 恒星A（質量 M）を回る物体B（質量 m）の運動を考える。他の天体の影響や大気などによる摩擦は無視できるとする。万有引力定数を G とする。恒星Aの位置を点O，物体Bの位置を点Pとする。$M \gg m$ として恒星Aは点Oに静止しているとしてよい。恒星Aと物体Bの距離を R とする。恒星Aや物体Bの大きさは距離 R に比べて小さく無視して良い（図1参照）。

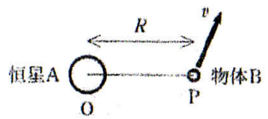

図1

(1) 物体Bに働く万有引力の線分 OP 方向の成分 F_R を示せ。

(2) 物体Bに働く万有引力の線分 OP と直角方向の成分 F_T を示せ。またその方向の物体Bの加速度 a_T を示せ。

恒星Aと物体Bが運動する平面を考える。点Oを原点とし，物体Bが点 P_1 にある時の x 方向の位置を x_1，速度を v_{x1}，加速度を a_{x1} とする。次に短い時間 Δt 後に物体Bは点 P_2 にあるとして，x 方向の位置を x_2 とする（図2参照）。

以下では短い時間 Δt について高次の項を無視して近似的に2次以下で考える。また短い時間 Δt の間の加速度の変化は小さくて無視できるとする。

(3) $x_2 - x_1$ を v_{x1}，a_{x1}，Δt を用いて表せ。

点 P_1 の y 方向の位置を y_1，速度を v_{y1}，加速度を a_{y1}，点 P_2 の y 方向の位置を y_2 とする。

(4) $y_2 - y_1$ を v_{y1}，a_{y1}，Δt を用いて表せ。

次に線分 OP の長さを r とし，線分 OP が x 軸となす角を θ として座標の取り方を変えて考えてみる。

図2のように，線分 OP_1 の長さを r_1 とし，線分 OP_1 が x 軸となす角を θ_1 とする。

(5) x_1，y_1 をそれぞれ r_1，θ_1 を用いて表せ。

(6) 線分 OP_1 と直角方向の速度を v_{T1} とする。ここですでに x 方向と y 方向に分解していた速度を，それぞれ線分 OP_1 の方向とそれと直角方向とに再分解し合成する。速度 v_{T1} を x 方向の速度 v_{x1} と y 方向の速度 v_{y1} を用いて表せ。ここで θ の大きくなる方向を正とせよ。

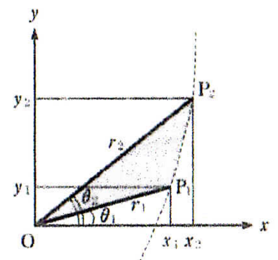

図2

(7) 線分 OP_1 と直角方向の加速度を a_{T1} とする。(6)と同様にして加速度 a_{T1} を x 方向の加速度 a_{x1} と y 方向の加速度 a_{y1} を用いて表せ。ここで θ の大きくなる方向を正とせよ。

図2のように，線分 OP_2 の長さを r_2 とし，線分 OP_2 が x 軸となす角を θ_2 とする。x_2，y_2 も r_2，θ_2 を用いて(5)と同様に表せる。

ここで物体Bの運動によりその位置の変化に対応して r や θ も変化する。そこで r の単位時間当たりの変化量を v_r とし，これを r の速度と呼ぶ。次に v_r の単位時間当たりの変化量を a_r とし，これを r の加速度と呼ぶ。これにしたがい，点 P_1 における r の速度を v_{r1}，r の加速度を a_{r1} とすると，$r_2 - r_1$ と v_{r1}，a_{r1}，Δt との関係は x の場合の(3)と同様の関係となる。

θ に関しても同様に θ の単位時間当たりの変化量を v_θ とし，これを θ の速度と呼び，v_θ の単位時間当たりの変化量を a_θ とし，これを θ の加速度と呼ぶ。点 P_1 における θ の速度を $v_{\theta1}$，θ の加速度を $a_{\theta1}$ とすると，これも同様の関係となる。

以下では簡単のために $\theta_1 = 0$ の場合を考える。

(8) y_2 を r_1，v_{r1}，a_{r1}，$v_{\theta1}$，$a_{\theta1}$，Δt を用いて表せ。

(9) (8)の y_2 を近似して Δt の2次以下にまとめよ。ここで Δt が小さいので，速度 v_{r1}，$v_{\theta1}$ や加速度 $a_{\theta1}$，$a_{\theta1}$ と Δt との積も小さいとして，近似すること。（注1参照）

(10) (4)の左辺に(5)と(9)の式を代入することにより，v_{y1}，a_{y1}，r_1，v_{r1}，a_{r1}，$v_{\theta1}$，$a_{\theta1}$，Δt の関係式ができる。ここで左辺と右辺の Δt の1次および2次の係数はそれぞれ等しいはずである。そこで v_{y1} を r_1，v_{r1}，$v_{\theta1}$ などを用いて表せ。また a_{y1} を r_1，v_{r1}，a_{r1}，$v_{\theta1}$，$a_{\theta1}$ などを用いて表せ。

(11) 物体Bが P_1 から P_2 へ移動するとき線分 OP が通過する面積 S（図2の灰色部）を，三角形 OP_1P_2 の面積に等しいと近似して，r_1，r_2，θ_2 を用いて表せ。

(12) θ_2 は小さいとして(11)の面積 S をさらに近似して，Δt の2次以下にまとめよ。（注1参照）

(13) 面積 S が短い時間 Δt に比例することを示せ。

注1：α（単位ラジアン）が小さいときは α の2次以下で近似すると

$\sin\alpha \fallingdotseq \alpha$，$\cos\alpha \fallingdotseq 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$ となる。

注2：下記の定理を用いて良い。

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

2 以下の各問に答えよ。

〔A〕 無限に長い直線状の導線が3本あり，別々に直流電流を流せるようになっている。ここでは，その導線の中央付近で長さ d の部分を考える。この内の1本を電子天秤の計量皿に水平に固定した（図3のAB）。他の1本は支柱に取り付けられた固定用器具で導線ABの真上にABと平行でABより高さ a のところに固定した（図3のCD）。もう1本はCDの真下に距離 s（$<a$）だけ離して，支柱に取り付けられた固定用器具で平行に固定した（図3のEF）。ここで，導線のたわみは非常に小さく，常に直線のままであると仮定してよいとする。この装置は地磁気（地球の磁場）をしゃへいできる部屋の中に置かれ，地磁気の影響を受けない形で実験が行われた。なお，電子天秤は周囲の磁場（磁界）の分布に影響を与えないし，周囲の磁場の影響も受けないとする。また，支柱と固定用器具も周囲の磁場の分布に影響を与えないとする。ここで，図3のように，水平に固定された導線と平行に x 軸を，鉛直方向に z 軸を，紙面に垂直に y 軸（紙面の表から裏へ向かう向きを正方向とする）を定義する。電子天秤は，計量皿にのせた物体に働く重力の大きさを測定し，重力加速度を用いて質量に換算して表示するもので，計量皿の上下動は無視できるとする。この実験では，導線の受ける重力や磁場から導線が受ける力については導線の長さ d の部分のみを考えればよいとする。3本の導線のこの部分の質量をそれぞれ M とし，導線の受ける重力は磁場から導線が受ける力より大きいとする。重力加速度は g とし，周囲の空気の透磁率は真空の透磁率と同じと近似してよいので μ_0 とする。以下の［(ア)］～［(オ)］には当てはまる語句を下記の解答群より選んで答え，［(1)］～［(6)］については，(4)には数値を，その他には当てはまる式を答えよ。

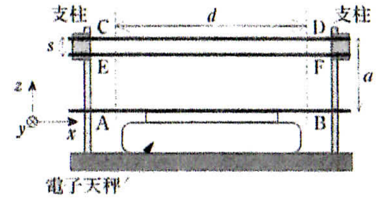

図3

解答群：x 軸正方向，x 軸負方向，y 軸正方向，y 軸負方向，z 軸正方向，z 軸負方向，小さくなる，大きくなる，a，a の2乗，s，s の2乗

導線ABにはAからBへ電流 I_1，CDにはCからDへ電流 I_2 を流し（$I_1>0$，$I_2>0$），EFには電流を流さなかった。このとき，導線CDが導線ABの位置につくる磁場の向きは［(ア)］でその磁場の強さは［(1)］と書けるので，導線ABが磁場から受ける力の向きは［(イ)］でその大きさは［(2)］となる。このとき，電子天秤に表示される質量は［(3)］だけ［(ウ)］。ここで，$a=5.0\times10^{-2}$〔m〕，$d=5.0\times10^{-1}$〔m〕，$I_1=1.0\times10$〔A〕，$I_2=2.0\times10$〔A〕，$\mu_0=4\pi\times10^{-7}$〔N/A²〕，$g=9.8$〔m/s²〕としたとき，(3)の数値を2桁で求めると［(4)］〔kg〕となる。次に，導線ABにはAからBへ電流 I_1 を，CDにはCからDへ電流 I_2 を流した状態で，さらにEFにはFからEへ電流 I_2 を流した。このとき，導線CDとEFとが導線ABの位置につくる磁場の強さは合わせて［(5)］でその向きは［(エ)］となる。ここで，s が a より十分小さい場合を考えると，e が十分小さいときに

$$\frac{1}{1-e} \fallingdotseq 1+e$$

が成り立つことを用いて，磁場の強さは［(6)］と近似でき，［(オ)］に反比例することがわかる。

〔B〕 図3において，導線ABに時間的に変化する電流 I をAからBへ流し，他の導線には電流を流さない場合を考える。このとき，半径 b で N 回巻きの小型円形コイルに電圧計をつないだもの（図4）を用いて，円形コイルに生じる誘導起電力を測定することにより，導線ABのまわりに生じる磁場の変化を調べる。なお，周囲の空気の透磁率は真空の透磁率と同じであると近似してよいので μ_0 とする。

図4

(1) 導線ABから距離 r だけ離れた位置において，磁場の変化を一番効率よく測定するためには図4の円形コイルをどのように設置すればよいか。導線ABと円形コイルの位置関係について，図3において紙面手前から見た場合と左横から見た場合の2方向から見た図を，解答欄(a)に左右に並べて示し（導線上の点A，点Bの位置を記すこと），解答欄(b)に簡潔な説明を記せ。ここで，図の少なくとも一方は円形コイルが丸く見える向きとすること。

(2) b が r に比べて十分小さいとき，円形コイル内には導線 AB から距離 r だけ離れた部分の磁場が一様に分布していると考えてよい。このとき，円形コイル内の磁束を電流 I を用いて表せ。

(3) 導線 AB に流れる電流が，時間 t の関数として $I=kt$（k は正の定数とする）という形で変化しているとする。このとき，円形コイルに生じる誘導起電力の大きさを求めよ。また，(1)で書いた図において，丸く見える向きのコイルの部分に，生じる電流の向きを矢印で示せ。

3 気体を加熱・冷却したときの，気体のする仕事について考える。

容器Aと移動体Bとシリンダー Cおよびピストン Dからなる装置がある（図5参照）。このピストンは可動範囲の任意の位置で固定できる。内部の気体は n モルの理想気体とする。この容器Aの左側は温度 T_H の加熱装置により常に加熱され，右側は温度 T_L の冷却装置により常に冷却されている。移動体Bを左右に移動させると，気体はすき間から反対側に移動する。容器A内の気体の体積を V_A とする。容器Aとシリンダー Cは細いパイプでつながり気体が移動できる。シリンダー Cの断面積を S とする。シリンダー Cとピストン Dとの間にすき間はないとする。

なお体積 V_A が大きい場合を考えているので，簡単のためにシリンダーにある気体の温度は，容器Aの気体の温度が一定となった時には，それと同じ温度になると仮定する。また気体の熱が移動するのは加熱装置と冷却装置との間のみで，他の場所での熱の移動は無いと仮定する。気体の移動時の摩擦や圧力差は無視できるとする。移動体やピストンの移動時の摩擦も無視できるとする。

〔A〕 ここではピストンは固定されず，その右側は開放で大気圧 P_0 とする（したがって気体は大気圧 P_0 である）。最初移動体は図5に示すように左側にあり，気体は冷却装置と同じ温度（T_L）とする。この時のピストンの位置を x_L とし，右側を x の正の方向とする。

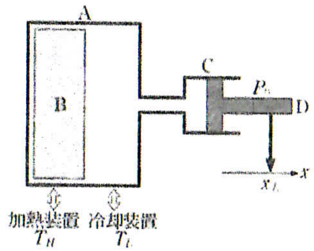

図5

そこで移動体が右側に移動すると，気体は左側に移動し，気体は加熱される。気体の体積が変化し，シリンダーとの間で気体の移動が起こり，ピストンが移動する。そこで気体が加熱装置と同じ温度（T_H）になったとする。

(1) 移動後の気体の体積およびピストンの位置を求めよ。

(2) 気体のした仕事 W_1 を求めよ。

(3) 温度 T の状態の気体分子1つのもつ平均の運動エネルギーを E とする。この気体の持つ内部エネルギー U を E を用いて表せ。次に U を E を用いずに（気体定数 R を用いて）表せ。

(4) 気体の温度が T_L から T_H に加熱されたときの内部エネルギーの変化量 ΔU_1 を求めよ。

(5) 気体の温度が T_L から T_H に加熱されたときの加熱装置から供給される熱量 Q_1 を求めよ。

次に移動体を左側に移動すると，気体は右側に移動し，冷却される。気体の体積が変化し，シリンダーとの間で気体の移動が起こり，ピストンが移動する。そこで気体が冷却装置と同じ温度（T_L）になったとする。この間の気体のした仕事を W_2 とする。

(6) 上記2回の移動体の移動により，気体のした仕事の和 W_A（$= W_1 + W_2$）を求めよ。

〔B〕 ここではピストンの位置を上記 x_L などに固定できるとする。また気体の圧力は外部とは独立に変化するとする。

最初移動体は左側にあり，気体は冷却装置と同じ温度（T_L）とする。この時のピストンの位置が x_L とすると，気体の圧力は P_0 である。そこで以下過程(a)～(d)に示すように加熱や冷却を行ったとする（図6参照）。

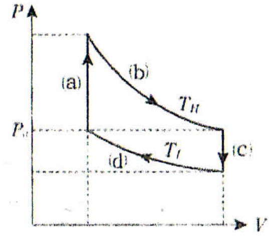

図6

過程(a) まずピストンの位置を固定する。移動体を右側に移動し，気体が加熱装置と同じ温度（T_H）になったとする。

(7) この過程における気体のした仕事 W_a，気体の内部エネルギーの変化量 ΔU_a を求めよ。

過程(b) 次にピストンの固定を外し，温度一定（T_H）を保ちながら体積や圧力が変化し，気体の圧力が P_0 になったとする。

変化の途中で気体の全体積が V の時の小さな体積変化 q を考えて，それに対応する外部への仕事を w とする。

(8) w を温度 T_H を用いて示せ。

この小さな体積変化 q を積み重ねて初めの体積から終わりの体積に変化することになる。この間の気体のした仕事を W_b とすると，$W_b = K \cdot T_H$ と書けるとし，K は気体の初めの体積と終わりの体積に依存し物質量にも依存するが温度には依存しないとする。

(9) この過程における気体の内部エネルギーの変化量 ΔU_b を求めよ。

過程(c) 次に再びピストンを固定する。移動体を左側に移動すると，気体は冷却され温度が冷却装置の温度と同じ（T_L）になったとする。

この過程における気体のした仕事を W_c，気体の内部エネルギーの変化量を ΔU_c とする。

過程(d)　次にピストンの固定を外し，温度一定（T_L）を保ちながら体積や圧力が変化し，気体の圧力が P_0 になったとする。変化の途中で気体の全体積が V の時の小さな体積変化 q を考えて，それに対応する外部への仕事を w とする。

(10)　w を温度 T_L を用いて示せ。

この過程における気体のした仕事を W_d，気体の内部エネルギーの変化量を ΔU_d とする。過程(b)と同様に考えることができて，$W_d = -K \cdot T_L$ と書ける。

これで気体は元に戻っているので過程(a)〜(d)の全体を考える。

(11)　気体の内部エネルギーの変化量の和 ΔU_B（$= \Delta U_a + \Delta U_b + \Delta U_c + \Delta U_d$）を示せ（$K$ を用いてよい）。

(12)　気体のした仕事の和 W_B（$= W_a + W_b + W_c + W_d$）を示せ（K を用いてよい）。

注）気体定数は R，アボガドロ定数は N_A とせよ。